מטרות ורעיונות מתמטיים

המשימה: משימת הארנבים

כיתת יעד: ז' – ט' (אפשרי גם בכיתות התיכון)

מטרות המשימה:

- חיזוק הקשרים בין מושג השטח ומושג ההיקף
- מציאת שטח מקסימלי עם היקף נתון
- קישור בין ייצוגים שונים של הפונקציה הריבועית: מילולי, מספרי, ויזואלי, גיאומטרי ואלגברי
- קישור בין ייצוגים אלגבריים וייצוגים גאומטריים
- תכונות שימוש באלגברה ככלי להכללה והצדקה
- התאמת מודל מתמטי לשאלה מציאותית
- העלאת השערות, ניסוחן ובדיקתן
- הפעלת שיקולים בחקירה

רעיונות, מושגים ודגשים מתמטיים:

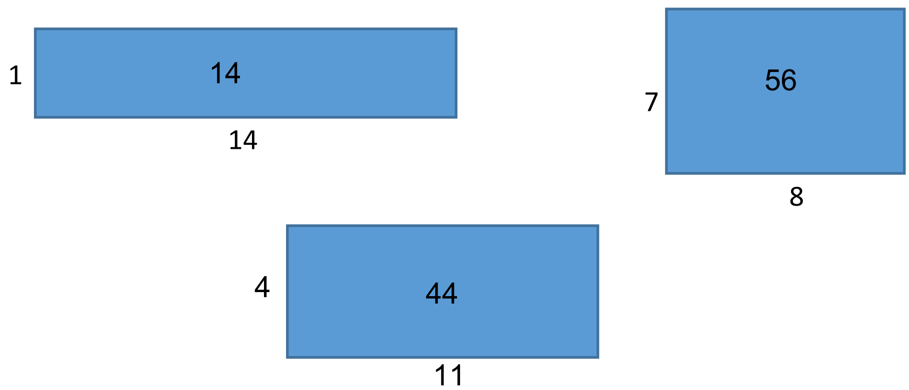
- רעיונות מרכזיים:
    - מבין כל המלבנים בעלי היקף נתון, הריבוע הוא בעל השטח המקסימלי.
    - מצולע משוכלל הוא בעל שטח מקסימלי (מבין המצולעים בעלי אותו היקף ומספר זהה של צלעות)
    - ככל שמספר הצלעות של מצולע משוכלל יהיה גדול יותר (שואף לאינסוף), כך שטח המצולע יהיה גדול יותר ויתקרב למעגל.
    - בהינתן היקף קבוע, השטח הגדול ביותר יתקבל במעגל.
- מציאת שטחים שונים עם היקף קבוע
- מציאת שטח מקסימלי עם היקף נתון
- הקשר בין נקודת הקיצון לבין מצב של מקסימום או מינימום
- בניה של צורות גאומטריות שונות תחת אילוצים שונים (האם ניתן לבנות משולש שווה צלעות שכל צלע היא 10 ס"מ ושהוא יהיה גם ישר זווית?)
- תכונות הפונקציה ריבועית

<u>הערה:</u>

משימה זו, מטבען של משימות פתוחות, יכולה לזמן עיסוק ברעיונות מתמטיים שונים ומגוונים. הרעיון המרכזי העומד בבסיסה של המשימה הוא ש**מבין כל המלבנים** בעלי היקף של 30 מ', הריבוע הוא בעל השטח המקסימלי. רעיון זה ניתן להמחשה על ידי ייצוגים שונים, כפי שמתואר בסעיף הבא (ייצוג ויזואלי, אלגברי, גרפי ועל ידי טבלה). כאשר הבניה של השטח המבוקש היא **לא רק באמצעות מלבנים**, השטח המקסימלי מתקבל כאשר מדובר ב**עיגול** ואז הרעיון המתמטי מעט מתרחב. יחד עם זאת, במצב זה ייתכן והתלמידים ינסו לייצר את השטח באמצעות צורות שונות שאת השטח של חלקן הם לא יודעים בהכרח לחשב באמצעות הידע הקודם שלהם (משולשים, טרפזים, מחומשים וכו'). גם במצב זה, ייתכן ויעלו רעיונות מתמטיים שונים ומגוונים שכדאי שהמורה יתכונן אליהם.

<u>תשובות אפשריות:</u>

1. ייצוג ויזואלי של מלבנים שונים:



2. ייצוג על ידי טבלה של צלעות המלבן ושטחו (מספרים שלמים):

צלע א'	צלע ב'	שטח
1	14	14
2	13	26
3	12	36
4	11	44
5	10	50

54	9	6
56	8	7
56	7	8
54	6	9
50	5	10
44	4	11
36	3	12
26	2	13
14	1	14

בשלב זה התלמידים בטוחים שמצאו את השטח המקסימלי. המורה מכוונת את התלמידים לחפש מלבנים שהצלעות שלהן אינן בהכרח מספרים שלמים.

3. ייצוג על ידי טבלה של צלעות המלבן ושטחו (כולל שברים):

שטח	**צלע ב'**	**צלע א'**
14	14	1
26	13	2
36	12	3
44	11	4
50	10	5
54	9	6
56	8	7
56.25	7.5	7.5
56	7	8
54	6	9
50	5	10
44	4	11
36	3	12
26	2	13
14	1	14

כאן התלמידים מצאו את המלבן בעל השטח המקסימלי שהוא בעצם ריבוע.

אך כיצד נדע שאכן זה המלבן בעל השטח המקסימלי?

4. ייצוג אלגברי של השטח כפונקציה של אחת הצלעות:

$$y = x(15 - x)$$

$$y = -x^2 + 15x$$

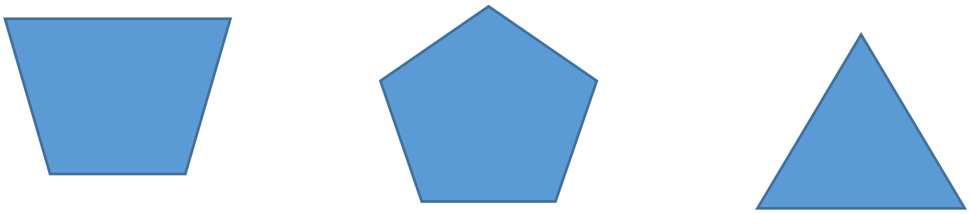
5. ייצוג גרפי של השטח כפונקציה של אחת הצלעות (פונקציה ריבועית):

נקודת המקסימום של הפונקציה מתארת את השטח המקסימלי של המלבן שמתקבל כאשר מדובר בריבוע בעל צלע של 7.5.

בשאלה לא ניתנה המגבלה שהשטח חייב להיות מלבן ולכן ניתן לכוון את התלמידים לחפש שטחים בצורות שונות. אולי בסידורים אלו יתקבלו שטחים גדולים יותר.

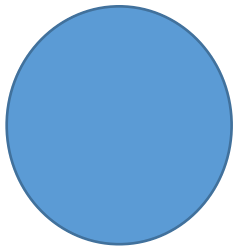
6. בניית מצולעים שונים בעלי היקף של 30 מ': משולשים, מחומשים, משושים וכו' וניסיון למצוא את השטח. הכלים בחט"ב לא מאפשרים למצוא את השטח של מצולעים אלו. כדי למצוא את השטח דרוש ידע מתקדם בגאומטריה ובטריגונומטריה). אבל הניסיון למצוא את השטח מעלה סוגיות מעניינות סביב בנייה של צורות גאומטריות שמצד אחד יקיימו תנאים מסוימים ומצד שני גם יהיו אפשריות. למשל: נבנה משולש שווה צלעות כאשר כל צלע היא 10 מ'.

התלמידים באופן אינטואיטיבי יבנו משולש ישר זווית כיוון שאותו הם יודעים לחשב אבל לא ייתכן שהיתר במשולש ישר זווית שווה לאחד הניצבים ולכן לא ניתן שמשולש יהיה גם שווה צלעות וגם שווה שוקיים. סוגיות אלו יתכנו בבניה של צורות אינטואיטיביות שונות (משולש שווה שוקיים, טרפז).



7. בנייה של מעגל:

נמצא את הרדיוס של המעגל בעל ההיקף הנתון ע"י נוסחת ההיקף:



$$30 = 2\pi r$$

$$15 = \pi r$$

$$r = \frac{15}{\pi}$$

ונציב בנוסחת השטח:

$$S = \pi \left(\frac{15}{\pi}\right)^2 = 71.619$$

וכך יתקבל השטח המקסימלי.

<u>לתלמידי תיכון:</u>

8. ניתן לגזור את הפונקציה ולחפש את נקודת המקסימום:

$$y = x(15 - x)$$

$$y = -x^2 + 15x$$

$$y' = -2x + 15$$

$$y' = 0$$

$$-2x + 15 = 0$$

$$x = 7.5$$

ואז נותר לוודא שאכן מדובר בנקודת מקסימום.

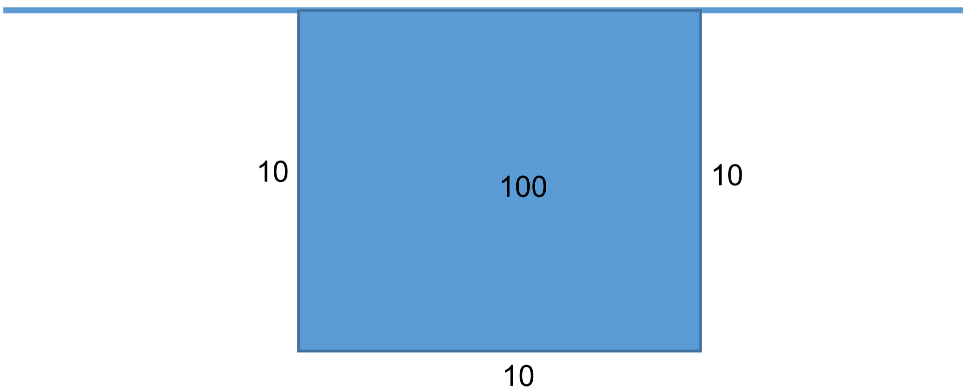
9. ע"י כלים מתקדמים של גאומטריה וטריגונומטריה, תלמידי תיכון יוכלו למצוא גם את השטח של משולש משוכלל, מחומש משוכלל, משושה משוכלל וכו'. וכך לראות כיצד כאשר מספר הצלעות שואף לאינסוף כך השטח גם כן גדל. ולכן, המעגל הוא בעל השטח המקסימלי.

<u>אפשרות להרחבת המשימה:</u>

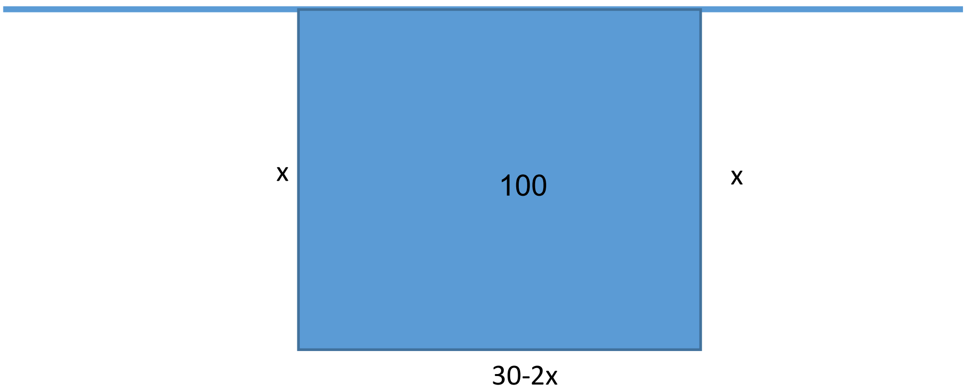
- אביה של רונית הציע להיעזר בקיר אחד של הבית כדי לגדר שטח של הארנבים. הציעו תכנית לשטח מקסימלי במצב זה.

פתרונות:

א. פתרון טריוויאלי

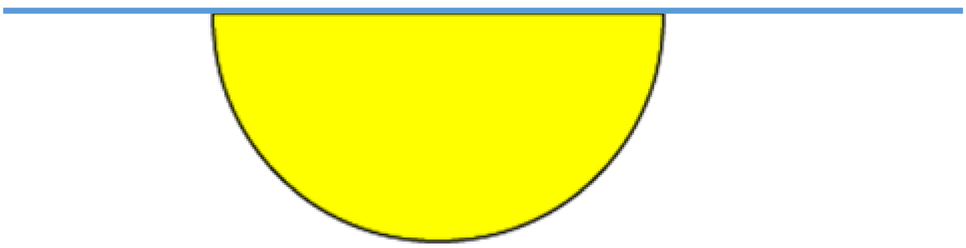


ב.



ואז מחפשים את השטח המקסימלי המתקבל במצב זה (באופן דומה לשאלה המרכזית: טבלת ערכים, גרף פונקציה, נגזרת וכו'). השטח המקסימלי: 112.5

$$y = x(30 - 2x)$$



באופן דומה לפתרון 7 נמצא את השטח של חצי עיגול:

נמצא את הרדיוס של המעגל בעל ההיקף הנתון ע"י נוסחת ההיקף:

$$30 = \frac{1}{2}2\pi r$$

$$30 = \pi r$$

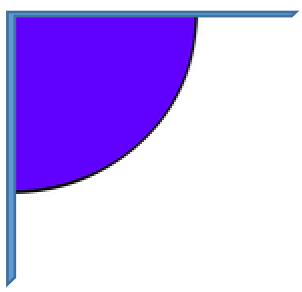
$$r = \frac{30}{\pi}$$

ונציב בנוסחת השטח:

$$S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{30}{\pi}\right)^2 = 143.23$$

וכך יתקבל השטח המקסימלי.

- אביה של רונית הציע להיעזר בשני קירות מאונכים (שיוצרים ביניהם זווית ישרה) של הבית כדי לגדר שטח של הארנבים. הציעו תכנית לשטח מקסימלי במצב זה.



פתרונות:

כאן התלמידים כבר אמורים להשתכנע באופן אינטואיטיבי שהשטח המקסימלי מתקבל כאשר יש מעגל. במקרה זה הדיון הוא על רבע מעגל ולכן:

נמצא את הרדיוס של המעגל בעל ההיקף הנתון ע"י נוסחת ההיקף:

$$30 = \frac{1}{4}2\pi r$$

$$60 = \pi r$$

$$r = \frac{60}{\pi}$$

ונציב בנוסחת השטח:

$$S = \frac{1}{4}\pi\left(\frac{60}{\pi}\right)^2 = 286.47$$

באופן דומה ניתן להמשיך לשאר סעיפי ההרחבות ולמצוא את החוקיות בין: אורך הרדיוס, הזווית והשטח המתקבל.

- אביה של רונית הציע להיעזר בשני קירות של הבית כך שביניהם יש זווית של 45 מעלות. הציעו תכנית לשטח מקסימלי במצב זה.
- אביה של רונית הציע להיעזר בשני קירות של הבית כך שביניהם יש זווית של x מעלות. הציעו תכנית לשטח מקסימלי במצב זה.